CHAPTER 3

Proposiciones matemáticas

28. Teoremas, axiomas, definiciones.

De lo que hemos dicho hasta ahora se puede concluir que consideramos que algunos enunciados geométricos son muy obvios (por ejemplo, las propiedades de los planos y las rectas en los Apartados 3 y 4 de la Introducción) mientras que otros se extablecen a través del razonamiento. (por ejemplo, las propiedades de los ángulos suplementarios del Apartado 22 y de los ángulos verticales del Apartado 26). En la Geometría este proceso de razonamiento es una de las formas principales de descubrir propiedades de las figuras geométricas. Por lo tanto sería instructivo que te familiarices con las formas usuales de razonamiento en la Geometría.

Todos los hechos establecidos en la Geometría se expresan en la forma de proposiciones (propiedades). Estas proposiciones se dividen entre los siguientes tipos:

Definiciones. Las definiciones son proposiciones que explican qué significado se atribuye a un nombre o a una expresión. Por ejemplo, hemos encontrado las difiniciones de ángulo central, ángulo recto, líneas perpendiculares, etc.

Axiomas. Los axiomas[1] son aquellos hechos que se aceptan sin demostración. Esto incluye, por ejemplo, algunas proposiciones que ya encontramos (Apartado 4 de la Introducción): a través de dos puntos hay una única línea recta; si dos puntos de una recta están en un plano dado, entonces todos los puntos de esta recta están en el mismo plano.

Mencionemos también los siguientes axiomas que se aplican a cualquier tipo de cantidades:

- si dos cantidades son iguales cada una a una tercera cantidad, entonces estas dos cantidades son iguales una a la otra.
- si la misma cantidad se suma o se resta de cantidades iguales, entonces la igualdad permanece.
- si la misma cantidad es sumada o restada de cantidades distintas, entonces la desigualdad permanece, i.e., la cantidad más grande sigue siendo más grande.

[1] En la Geometría algunos axiomas tradicionalmente se llaman **postulados**.

Teoremas. Los teoremas son aquellas proposiciones cuya verdad se halla sólo a través de cierto proceso de rtazonamiento (una demostración). Las siguientes proposiciones pueden servir de ejemplo:

- si en una circunferencia o en dos circunferencias congruentes algunos ángulos centrales son congruentes, entonces sus arcos correspondientes son congruentes.
- si uno de los cuatro ángulos formados por dos rectas que se intersecan es recto, entonces los tres ángulos restantes también son rectos.

Corolarios. Los corolarios son aquellas proposiciones que se siguen directamente de un axioma o de un teorema. Por ejemplo, se sigue del axioma "hay sólo una recta que pasa por dos puntos" que "dos rectas se pueden intersecar en a lo más un punto".

29. El contenido de un teorema.

En cualquier teorema se pueden distinguir dos partes: la hipótesis y la conclusión. La **hipótesis** expresa lo que se considera dado, la **conclusión** lo que se debe probar. Por ejemplo, en el teorema "si los arcos centrales son congruentes, entonces sus arcos correspondientes son congruentes", la hipótesis es la primera parte del teorema "si los arcos centrales son congruentes" y la conclusión es la segunda parte "entonces sus arcos correspondientes son congruentes"; en otras palabras, está dado (es lo que sabemos) que los ángulos centrales son congruentes y se debe probar que bajo esta hipótesis los arcos correspondientes son congruentes.

La hipótesis y la conclusión de un teorema puede consistir a veces de varias hipótesis y conclusiones separadas; por ejemplo, en el teorema "si un número es divisible entre 2 y entre 3, entonces es divisible entre 6", la hipóteis consiste de dos partes: "si un número es divisible entre 2" y "si el número es divisible entre 3".

Es útil notar que cualquier teorema puede redactarse de tal manera que la hipótesis comienza con la palabra "si" y la conclusión con la palabra "entonces". Por ejemplo, el teorema "los ángulos verticales son congruentes" se puede reescribir de esta manera: "*si* dos ángulos son verticales, *entonces* son congruentes".

30. El teorema converso.

El teorema converso a un teorema dado se obtiene reemplazando la hipótesis del teorema dado con la conclusión (o alguna parte de la conclusión) y la conclusión con la hipótesis (o alguna parte de la hipótesis) del teorema dado. Por ejemplo, los siguientes dos teoremas son conversos el uno del otro:

Si los ángulos centrales son congruentes, entonces los arcos correspondientes on congruentes.

Si los arcos son congruentes, entonces los ángulos centrales correspondientes son congruentes.

Si llamamos a uno de estos teoremas **directo**, entonces el otro se debe llamar **converso**.

En este ejemplo ambos teoremas, el directo y el converso, resulta que son ciertos. Éste no es siempre el caso. Por ejemplo, el teorema: "si dos ángulos son verticales, entonces son congruentes" es cierto, pero el enunciado converso "si dos ángulos son congruentes, entonces son verticales" es falso.

En efecto supongamos que en un cierto ángulo se traza su bisectriz (Figura 13). Ésta divide al ángulo en dos más chicos. Estos ángulos más chicos son congruentes, pero no son verticales.

Ejercicios.

(1) Formula las definiciones de ángulos suplementarios (Apartado 22) y de ángulos verticales (Apartado 26) usando la noción de *lados* de un ángulo.
(2) Encuentra en el texto la definición de ángulo, de su vértice y de sus lados en términos de la noción de *rayo trazado desde un punto*.
(3) En la Introducción encuentra las definiciones de rayo y de segmento de recta en términos de las nociones de *línea recta* y punto. ¿Hay definiciones de punto, línea, superficie o sólido geométrico? ¿Por qué?
Comentario: Estos son ejemplos de nociones geométricas que se consideran **indefinibles**.
(4) ¿Lo siguiente es una definición, un axioma o un teorema? "Dos segmentos son congruentes si se puede colocar uno sobre el otro de tal manera que sus extremos coincidan".
(5) Encuentra en el texto las definiciones de figura geométrica y de figuras geométricas congruentes. ¿Hay definiciones de segmentos congruentes, arcos congruentes, o ángulos congruentes? ¿Por qué?
(6) Define una circunferencia.
(7) Formula la proposición conversa al teorema "Si un número es divisible entre 2 y entre 3, entonces es divisible entre 6". ¿Es cierto el converso de esta proposición? ¿Por qué?
(8) De la proposición "Dos arcos de la misma circunferencia son congruentes si se pueden alinear de tal maner que sus extremos coinciden", separa la hipótesis de la conclusión y enuncia la proposición conversa. ¿Es cierta la proposición conversa? ¿Por qué?
(9) Del teorema "Las bisectrices de ángulos suplementarios son perpendiculares" separa la hipótesis y la conclusión y formula la proposición conversa. ¿Es cierta la proposición conversa?

(10) Da un ejemplo que refute la proposición: “Si las bisectrices de dos ángulos con vértice común son perpendiculares, entonces los ángulos son suplementarios”. ¿Es cierta la proposición conversa?